فریبا میرحسین‌زاده، دبیر ریاضی از تبریز

الفبای ترسیم

مقدمه

ترسیم چیست؟ ترسیمی که تنها با خط‌کش و پرگار صورت می‌گیرد و از یک رشته مراحل تشکیل شده است و در هر مرحله یکی از کارهای زیر انجام می‌گیرد:

۱. وصل کردن دو نقطه به‌وسیلهٔ خط راست؛
۲. یافتن نقطهٔ تلاقی دو خط؛
۳. رسم یک دایره با یک شعاع مفروض و به مرکز یک نقطهٔ داده شده؛
۴. یافتن نقطه‌های تلاقی یک دایره با دایره‌های دیگر، یا نقطهٔ تلاقی یک دایره با یک خط.

مسئله‌های ترسیم همیشه موضوع محبوبی در هندسه بوده‌اند. خواننده از دورهٔ مدرسه به یاد دارد که می‌توان فقط با خط‌کش و پرگار، انواع زیادی از ترسیم‌ها را انجام داد. در همهٔ مسائل ترسیم از خط‌کش فقط به‌عنوان ابزاری غیرمدرج برای کشیدن خط راست استفاده می‌شود و نه اندازه‌گیری یا مشخص کردن فاصله‌ها.

یکی از مشهورترین مسئله‌های کلاسیک ترسیم، مسئلهٔ «تماس‌ها» از **آپولونیوس** (حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد) است که در آن سه دایرهٔ دلخواه در صفحه مفروض‌اند و مطلوب مسئله، دایرهٔ چهارمی است که بر هر سه مماس باشد.

گاوس[1] در ۱۷ سالگی به بررسی ترسیم‌پذیری pضلعی منتظم در حالتی که p عددی اول باشد، پرداخت. او کشف کرد که pضلعی منتظم ترسیم‌پذیر است: اگر و تنها اگر p یک «عدد فرما»ی اول، یعنی $p = 2^{2^n} + 1$ باشد. نخستین عددهای فرما ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ هستند.

وقتی با یک ترسیم هندسی سروکار داریم، هرگز نباید فراموش کنیم که مسئله این نیست که شکل‌هایی را به‌طورعملی و با درجهٔ معینی از دقت بکشیم؛ بلکه باید روشن کنیم، آیا فقط با استفاده از خط‌کش و پرگار و با فرض اینکه ابزارهای ما از دقت کامل برخوردارند، می‌توان به‌طور نظری به جواب دست یافت یا نه.

حال به بررسی چند ترسیم کلاسیک می‌پردازیم. کلید فهم عمیق‌تر این موضوع برگرداندن مسئله‌های هندسی به زبان جبر است. در این صورت ترسیم هندسی عبارت است از حل یک معادلهٔ جبری. نخست باید رابطهٔ (معادلهٔ) بین کمیت خواسته شده (x) و کمیت‌های مفروض (a, b, c, ...) را پیدا کنیم. سپس باید کمیت مجهول را با حل این معادله بیابیم و بالاخره باید تعیین کنیم که آیا می‌توان این جواب را با فرایندهای جبری به‌دست آورد که متناظر با ترسیم‌هایی با خط‌کش و پرگار باشد یا نه.

بنیان تمام نظریه‌های مورد بحث ما اصل اساسی هندسه تحلیلی، یعنی مشخص‌سازی کمی اشیای هندسی به‌وسیلهٔ عددهای حقیقی است که برپایهٔ مفهوم پیوستار اعداد حقیقی قرار دارد.

> **توجه:** بعضی از ساده‌ترین عمل‌های جبری متناظرند با ترسیم‌های مقدماتی. اگر دو پاره‌خط با طول‌های a و b داده شده باشند، آن‌گاه رسم ab، $\frac{a}{b}$، a–b و a+b کار خیلی ساده‌ای است.

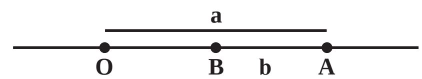
۱. ترسیم a+b

خط راستی می‌کشیم و روی آن فاصله‌های AB=b و OA=a را با پرگار مشخص می‌کنیم. در این صورت: OB=a+b.

۲. ترسیم a–b

خط راستی می‌کشیم و روی آن فاصله‌های AB=b

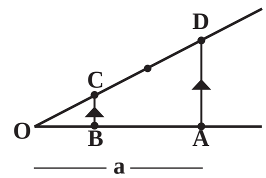
و OA=a را با پرگار مشخص می‌کنیم، اما این‌بار AB را در جهت مخالف OA تعیین می‌کنیم. در این صورت: OB=a−b.



۳. ترسیم ۳a

برای ترسیم آن a+a+a را رسم می‌کنیم.

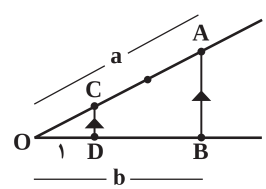
۴. ترسیم $\frac{a}{۳}$



OA=a را روی یک خط مشخص می‌کنیم و خط دیگری را که از O بگذرد، می‌کشیم. روی این خط، پاره‌خط دلخواه OC=c را مشخص می‌کنیم و OD=۳c را رسم می‌کنیم. A و D را به‌هم وصل می‌کنیم و خطی گذرنده از C به موازات AD می‌کشیم که OA را در B قطع کند.

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel AD \rightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OD} \\ \frac{OC}{OD}=\frac{c}{۳c}=\frac{۱}{۳} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{۱}{۳} \rightarrow OB=\frac{OA}{۳}=\frac{a}{۳}$$

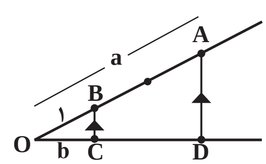
۵. ترسیم $\frac{a}{b}$



OA=a و OB=b را روی ضلع‌های زاویهٔ دلخواه O و OD=۱ را روی OB مشخص می‌کنیم. از D خطی به موازات AB رسم می‌کنیم که OA را در C قطع کند. داریم:

$$CD \parallel AB \rightarrow \frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB} \rightarrow \frac{OC}{a}=\frac{۱}{b} \rightarrow OC=\frac{a}{b}$$

۶. ترسیم a.b



OA=a و OC=b را روی ضلع‌های زاویهٔ دلخواه O و OB=۱ را روی OA مشخص می‌کنیم. از A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم که OC را در D قطع کند. داریم:

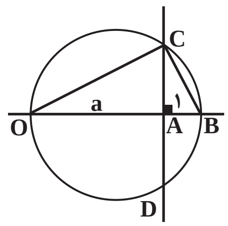
$$BC \parallel AD \rightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OD} \rightarrow \frac{۱}{a}=\frac{b}{OD} \rightarrow OD=a.b$$

از مطالب بالا نتیجه می‌گیریم که عمل‌های جبری «گویا» (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کمیت‌های معلوم) را می‌توان با ترسیم هندسی انجام داد.

۷. ترسیم $\sqrt{a}$

روی خط راستی AB=۱ و OA=a را مشخص می‌کنیم (با خط‌کش و پرگار). دایره‌ای به قطر OB رسم می‌کنیم. سپس در نقطهٔ A عمودی بر OB رسم می‌کنیم تا دایره را در C قطع کند.

زاویهٔ OCB محاطی و روبه‌رو به قطر دایره است. پس:



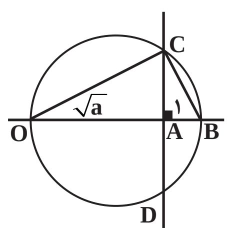
$$O\hat{C}A=\frac{\widehat{OB}}{۲}=\frac{۱۸۰^{\circ}}{۲}=۹۰^{\circ}$$

و در مثلث OCB پاره‌خط AC ارتفاع وارد بر وتر است. پس:

$$CA^{۲}=OA\times AB \rightarrow CA^{۲}=a\times ۱ \rightarrow CA=\sqrt{a}$$

۸. ترسیم $\sqrt[۴]{a}$

روی خط راستی $OA=\sqrt{a}$ و AB=۱ را مشخص می‌کنیم (با خط‌کش و پرگار). دایره‌ای به قطر OB رسم می‌کنیم در نقطهٔ A عمودی بر OB رسم می‌کنیم تا دایره را در C قطع کند. در مثلث OCB پاره‌خط CA ارتفاع وارد بر وتر است. پس:



$$CA^{۲}=OA\times AB \rightarrow CA^{۲}=\sqrt{a}\times ۱ \rightarrow CA=\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[۴]{a}$$

و به روش مشابه می‌توان $\sqrt[۸]{a},\sqrt[۱۶]{a},...,\sqrt[۲^n]{a}\ (۲\in N)$ را رسم کرد.

اما در ریاضیات عالی ثابت می‌شود که دیگر ریشه‌ها، از جمله $\sqrt[۳]{a}$ و $\sqrt[۵]{a}$ قابل رسم نیستند.

پی‌نوشت‌ها

1. Gauss

کارل فردریش گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷) ریاضی‌دان بسیار مشهور آلمانی که به‌عنوان یکی از برترین ریاضی‌دانان همهٔ اعصار شناخته می‌شود.